

КАСЫМОВ АЙДЫН АДИЛОВИЧ

БІРТЕКТІ ЛИ ТОПТАРДАҒЫ БӨЛШЕКТІ РЕТТІ ОПЕРАТОРЛАР ҮШІН НЕГІЗГІ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР

«6D060100-Математика» мамандығы бойынша философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияға

АНДАТПА

Зерттеу тақырыбының өзектігі. Гейзенберг тобындағы субеллиптикалық талдауды зерттеген алғашқы математиктер Фолланд пен Стейн болды, олар дәйекті түрде жалпы стратификацияланған топтар үшін талдаудың жалпылауын құрды. Ротшилд пен Стайн бұл нәтижелерді Гормандердің жағдайын қанағаттандыратын жалпы векторлық өрістер үшін жалпылағанын атап өтуге болады. Бұл нәтижелер анизотропты анализі бар әйгілі Фолланд және Штайн кітабында жарияланған деп айта аламыз. Айта кету керек, біртекті Ли тобы нильпотентті.

Бөлшек есептеу тарихы Риман мен Лиувилльдің еңбектерінен бастау алады. Бұл еңбектерде алғашқы рет бөлшек интеграл ұғымы енгізілді. Бүтін бұ туындылармен бірге бөлшек туынды деген ұғым енгізілді, оған Риман мен Лиувиль есімдері берілді. Содан кейін Адамар өз еңбектерінде бөлшек туындыға тағы бір анықтама енгізді. Сондай-ақ, Капуто белгілі бір жағдайда Риман-Лиувиль туындысына тең болатын бөлшек туынды анықтамасын да енгізгенін айта кету керек. Бұл операторлар жергілікті емес операторлар болып табылады. Бұл бөлшек туындылар бірөлшемді операторлар екеніне назар аударыңыз. Көпөлшемді жағдай үшін көпөлшемді бөлшек Лапласиан ұғымы Лаплас символы арқылы енгізілген. Айта кету керек, бөлшек есептеу қазіргі уақытта қарқынды дамып келе жатқан математикалық сала. Диссертацияның негізгі мақсаты - коммутативті емес топтық талдау мен бөлшек есептеулерді біріктіру.

Қазіргі уақытта Ли топтары бойынша функционалды және геометриялық теңсіздіктер қазіргі кезде математиканың қарқынды дамып келе жатқан саласы болып табылады. Механика және физика есептерінің көптеген сызықтық емес дифференциалдық теңдеулері, олар үшін функционалды теңсіздіктер қолдана отырып, мәселелердің ғаламдық шешілетіндігі дәлелденді. Бұл дегеніміз, ЭҚЖ-ны зерттеудің маңызды құралдарының бірі - функционалды теңсіздік. Мысалы, көп өлшемді Харди тәрізді теңсіздік келесі теңсіздікті көрсетеді:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \left(\frac{p}{n-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx, \quad 1 < p < n, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

| · | Евклид қашықтық және тұрақты $\left(\frac{p}{n-p}\right)^p$ - ең жақсы. Бұл теңсіздік математиканың көптеген салаларында, мысалы, спектрлік теорияда қолданылады. Сонымен қатар осы теңсіздік арқылы кванттық теорияда қолданылатын Гейзенберг-Паули белгісіздік принципін көрсете аламыз. Біріншіден, Гарофало мен Ланконелли топтық параметрлер үшін Гейзенберг тобы үшін Харди теңсіздігін алды.

Диссертация жұмысының мақсаты Харди, Соболев, Харди-Соболев, Галлардо-Ниренберг, Каффарелли-Кох-Ниренберг, Харди-Литтлвуд-Соболев және Стейн-Вайсс теңсіздігі сияқты біртекті топтардағы бөлшектік субеллиптикалық функционалдық және геометриялық теңсіздіктерді зерттеуден тұрады. Кері теңсіздіктерді де зерттейміз. Біз Хардидің метрикалық өлшемдер кеңістігіндегі кері интегралдық теңсіздігін зерттейміз. Нәтижесінде біз біртекті топтарға, гиперболалық кеңістікке және Картан-Адамар копбейнесі үшін кері Харди интегралдық теңсіздігін көрсетеміз. Содан кейін біртекті емес топтарға сызықтық емес дифференциалдық тендеулерде функционалдық теңсіздіктердің қолданылуын көрсетеміз. Сонымен қатар, біз Капуто, Риман-Лиувиль және Адамардың туындылары үшін бір өлшемді бөлшек функционалдық теңсіздіктерді орнатамыз. Содан кейін біз бір өлшемді теңсіздіктердің кейбір қосымшаларын береміз.

Зерттеу міндеттері:

- тікелей функционалдық теңсіздіктер;
- кері функционалды теңсіздіктер;
- осы теңсіздіктерді сызықтық емес ДТДТ-ге қолдану;
- интервалдағы бір өлшемді функционалдық теңсіздіктер.

Зерттеу объектісі - Біртекті Ли топтарындағы негізгі бөлшек функционалдық теңсіздіктердің дәлелі: Харди, Соболев, Харди-Соболев, Гальярдо-Ниренберг, Каффарелли-Кон-Ниренберг, Харди-Литтлвуд-Соболев және Стейн-Вайсс теңсіздігі, кеңістікке қатысты Хардидің интегралдық теңсіздігі. өлшемдер, оның біртектес топтарға, гиперболалық кеңістікке және Картан-Хаддамард алуан түріне, кері Харди-Литтлвуд-Соболев кері тендеуі, кері Стейн-Вайсс тендеуі, жақсыланған кері Стейн-Вайсс теңсіздіктері Ли топтар, сызықтық емес дифференциалдық тендеулер және өлшемді функционалдық теңсіздікті оның қолдану.

Зерттеу әдістері. Докторлық диссертациясын, классикалық есептеулер әдісін, бөлшекті есептеулер, Ли топтарының теориясын, ДТДТ теориясы, сондай-ақ математика ғылымдарының жаңа идеяларын зерттеу үшін қолданылады.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыста келесі жаңа нәтижелер алынды:

- *Тікелей теңсіздіктер.* Бұл тарауда тікелей теңсіздіктер үшін біз Харди, Соболев, Харди-Соболев, Гальярдо-Ниренберг, Каффарелли-Кон-Ниренберг теңсіздіктері, логарифмдік теңсіздіктер, Харди-Литтлвуд-Соболев және Стайн-Вайс бөлшектері туралы біртекті Ли топтары бойынша алдық. Соболев - Фолланд - Стайн теңсіздігі, сонымен қатар стратификацияланған топтар бойынша да алынған.

- *Стратифицирленген топтарда көлденең теңсіздіктер.* Кері теңсіздіктер үшін біз Хардидің $q < 0$, $p \in (0,1)$ және $-\infty < q \leq p < 0$ параметрлері бар кері интегралдық теңсіздіктерді дәлелдейміз. Сондай-ақ, біз Хардидің біртекті Лие топтары, гиперболалық кеңістік және $q < 0$, $p \in (0,1)$ бар Картан-Хадамард көп қырлы бөліктеріндегі кері интегралдық теңсіздіктерді көрсетеміз. Нәтижесінде біз кері Харди-Литтлвуд-Соболев, Стайн-Вайс теңсіздіктерін және $q < 0$, $p \in (0,1)$ және $-\infty < q \leq p < 0$ үшін Стайн-Вейс теңсіздіктерінің жақсартылған нұсқаларын көрсетеміз. Сонымен қатар, біз біртекті Ли топтары бойынша радиалды туындысы бар Харди, L^p - Соболев және L^p - Каффарелли-Кон-Ниренберг-тің кері теңсіздіктерін алдық.

- *Қолдану.* сы тарауда біркелкі емес топтарға сызықтық және сызықты емес дифференциалдық теңдеулерде осы теңсіздіктердің кейбір қолданыстары көрсетілген. Біріншіден, біз бөлшек теңдеу және p -сублапастық жүйелер үшін Ляпунов теңсіздігін аламыз және спектрлік теорияда қолдануды көрсетеміз. Біртекті Ли топтары бойынша кейбір сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің әлсіз шешімдерінің бар екендігі де көрсетілген. Содан кейін біз біртекті Ли топтары бойынша логарифмдік сызықты емес және бөлшек суб плазиялық жылу теңдеуі үшін нәтижелерді көрсетеміз. Содан кейін стратификацияланған Ли топтары бойынша вискоэластикалық теңдеу үшін сыну нәтижесін аламыз. Содан кейін біз Фудзита және Като көрсеткіштерін жылу және Рокланд толқындарының теңдеуінде градуирленген (Ли) топтарында көрсетеміз.

- *Қосымша.* Осы тарауда біз Евклид жағдайындағы бір өлшемді функционалдық теңсіздіктерді қарастырамыз. Пуанкаре типті, Гаглардо-Ниренберг типті және Каффарелли-Кон-Ниренберг түріндегі теңсіздіктер Капуто, Риман-Лиувиль және Адамардың бөлшек туындылары түрінде бөлшек дифференциалдық операторлар үшін бөлшек теңсіздіктер жолға

қойылған. Осы теңсіздіктердің қолданылуын да көрсетеміз. Сонымен қатар, осы теңсіздіктерді қолданып біз Дирихле есебінің эллиптикалық типіндегі бөлшек дифференциалдық теңдеу үшін Ляпунов пен Хартман-Винтнер типтерінің теңсіздіктерін көрсетеміз, және де Валье-Пуссин типінің теңсіздігін көрсетеміз.

Нәтижелердің теориялық және тәжірибелік маңыздылығы. Бұл зерттеу негізінен іргелі болып табылады, нильпотент Ли топтарының функционалдық талдау теориясы мен дифференциалдық теңдеулер теориясы дамуына бағалы үлес қосады және ғылыми әлемдегі Қазақстан Республикасының имиджін көтеруге ықпал етеді. Нәтижелер теориялық физиканың әртүрлі мәселелерін шешу үшін қолданылатын болады.

Жарияланымдар. Диссертация бойынша 14 жұмыс жарық көрді, оның ішінде 3 ғылыми жарияланымдар, ғылыми жұмыстардың негізгі ғылыми нәтижелерін жариялау үшін ҚР БҒМ Білім және ғылымды бақылау комитеті ұсынған тізімге енгізілген, Thomson Reuters мәліметтер базасында немесе Scopus мәліметтер базасында, 4 халықаралық конференциялардың материалдарындағы жарияланымдар.

Диссертация тақырыбы бойынша нәтижелер келесі жұмыстарда жарияланды:

Рейтингі жоғары мақалалар

1 A. Kassymov, M. Ruzhansky and D. Suragan. Fractional logarithmic inequalities and blow-up results with logarithmic nonlinearity on homogeneous groups. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 27:7, 2020. (Scopus, Web of Science, Q1);

2 A. Kassymov, M. Ruzhansky and D. Suragan. Hardy-Littlewood-Sobolev and Stein-Weiss inequalities on homogeneous Lie groups. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 30(8):643--655, 2019. (Scopus, Web of Science, Q2);

3 A. Kassymov and D. Suragan. Existence of solutions for p-sub-Laplacians with nonlinear sources on the Heisenberg group. *Complex Variables and Elliptic Equations*, dx.doi:10.1080/17476933.2020.1731737, 2020. (Scopus, Web of Science, Q2);

4 A. Kassymov, B. Torebek and N. Tokmagambetov. Nonexistence Results for the Hyperbolic-Type Equations on Graded Lie Groups. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, doi:10.1007/s40840-020-00919-6, 2020, (Scopus, Web of Science, Q2);

5 Bekbolat B., Kassymov A., Tokmagambetov N. Blow-up of Solutions of Nonlinear Heat Equation with Hypoelliptic Operators on Graded Lie Groups.

Complex Analysis and Operator Theory, 13(7):3347-3357, 2019. (Scopus, Web of Science, Q2);

6 A. Kassymov and D. Suragan. Fractional Hardy-Sobolev inequalities and existence results for fractional sub-Laplacians. Journal of Mathematical Sciences, to appear. (Scopus, Q3);

7 A. Kassymov and D. Suragan. Lyapunov-type inequalities for the fractional $\mathbb{H}^s$ -sub-Laplacian. Advances in Operator Theory, 1-18, doi:10.1007/s43036-019-00037-6, 2020. (Scopus, Web of Science);

KKCOH

1 A. Kassymov and Suragan D. An analogue of the fractional Sobolev inequality on the homogenous Lie groups. Mathematical Journal, 18(1):99-110, 2018;

2 A. Kassymov and Suragan D. Reversed Hardy–Littlewood–Sobolev inequality on homogeneous Lie groups. Kazakh Mathematical Journal, 19(1):50-57, 2019;

3 A. Kassymov. Blow-up of solutions for nonlinear pseudo-parabolic Rockland equation on graded Lie groups. Kazakh Mathematical Journal, 19(3):89-100, 2019.

Халықаралық конференция материалында

1 A. Kassymov. On the S-number inequalities of triangular cylinders for the heat operator. Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day. -April 10, 2018 - Almaty. - P.109.

2 A. Kassymov, A. Kashkynbayev and Suragan D. Non-blow-up and blow-up results to heat equations with logarithmic nonlinearity on stratified groups. «Traditional International April math conference in honor Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan, dedicated to the 1150th anniversary of Abu Nasyr al-Farabi and 75th anniversary of the Institute of Mathematics and mathematical Modeling», p.45, 2020.

3 A. Kassymov, A. Kashkynbayev and Suragan D.. Blow-up results for viscoelastic wave equations with damping terms on stratified groups. «Traditional International April math conference in honor Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan, dedicated to the 1150th anniversary of Abu Nasyr al-Farabi and 75th anniversary of the Institute of Mathematics and mathematical Modeling», p.46, 2020.

4 A. Kassymov and Suragan D. Cordoba-Cordoba type inequality on homogenous Lie groups. Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. - September 6-9, 2018- North Cyprus- P. 109.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация мазмұнынан, кіріспеден, кіріспе мәліметтерінен, 3 бөлімнен, қосымшадан, қорытындыдан және 129 тақырыптан тұратын әдебиеттер тізімі бар. Диссертацияның жалпы көлемі - 205 бет.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Кіріспе диссертация тақырыбының өзектілігін, мақсаты, объектісі, пәні, зерттеу мақсаттары, жұмыстың ғылыми жаңалығын негіздеу, оның теориялық және практикалық маңызы, қорғалатын ғылыми қағидалар, қол жетімді жарияланымдар саны негізделеді.

3-тарауда біз біртекті Ли топтары бойынша бөлшек функционалдық және геометриялық теңсіздіктер теориясын дамытамыз. Біртекті Ли топтары бойынша Харди, Соболев, Гальярдо-Ниренберг, Каффарелли-Кон-Ниренбергтің бөлшекті теңсіздіктері және олардың логарифмдік бөлшек теңсіздіктері алынды, бұл Евклид кезінде үшін де жаңа. Рисс потенциалы (немесе бөлшек интеграл) үшін Харди-Литтлвуд-Соболев теңдігінің біртектес Ли топтары бойынша алынады, бұл $L^q - L^p$ кеңістіктеріндегі Рисс операторының шектелгендігін білдіреді. Сонымен қатар, Рисс потенциалы үшін Стайн-Вайсс теңсіздігін аламыз (немесе радиалды түрде өлшенген Харди-Литтлвуд-Соболев теңсіздігі). Сонымен қатар, біз стратификацияланған Ли топтарында логарифмдік Соболев-Фолланд-Стайн бүтін ретті теңсіздігін көрсетеміз.

4-тарауда біз кері функционалды теңсіздіктер туралы мәселені зерттейміз. Біріншіден, біз Хардидің өлшемдер кеңістігіндегі кері интегралдық теңсіздігін зерттей бастаймыз. Ружанский мен Верманың еңбектерінде авторлар өлшеулердің метрикалық кеңістігіне полярлық ыдырау енгізгенін атап өтеміз, бұл олардың дәлелдеуде маңызды рөл атқарады. Бұл тарауда біз Хардидің $q < 0$, $p \in (0,1)$ және $-\infty < q \leq p < 0$ параметрлері бар өлшемдердің кеңістігіндегі кері интегралдық теңсіздікті аламыз. Қорытынды ретінде біз Харди интегралдық теңсіздігін, біртекті Ли топтарына, гиперболалық кеңістікке және Картан - Адамар көпбейнесінде параметрлері $q < 0$, $p \in (0,1)$ болған жағдайында көрсетеміз. Сондай-ақ, өлшемдері бар метрикалық кеңістікте Харди интегралдық кері теңсіздігін $-\infty < q \leq p < 0$ көрсетеміз және нәтижесінде Хардидің кері интегралдық теңсіздігін біртекті Ли топтары бойынша көрсетеміз. Содан кейін кері Харди-Литтлвуд-Соболев, Стайн-Вайсс теңдеулерін және $q < 0$, $p \in (0,1)$ параметрлері бар біртекті Ли топтары бойынша жетілдірілген Стайн-Вайсс теңсіздіктерін аламыз. Сонымен қатар, біз Стайн-Вайсс типіндегі кері Харди-Литтлвуд-Соболев түрін алдық, және евклидтік параметрлер үшін жаңа

болып табылатын $-\infty < q \leq p < 0$ параметрлері бар жақсартылған теңсіздіктерді аламыз. Сонымен қатар, Харди, L^p -Соболев және L^p - Каффарелли-Кон-Ниренберг-тің кері теңсіздіктерін біртекті Ли топтары бойынша радиалды туындымен аламыз.

5-тарауда біз ДТДТ-де функционалдық теңсіздіктердің қосымшаларын береміз. Біріншіден, біз Л-Лапуновтың бөлшек p -суб-Лапласиан теңдеуі мен біртектес Ли топтарындағы жүйелер үшін аламыз. Ляпунов теңсіздігінің қосындысы ретінде біз біртекті Ли топтарындағы p -суб-Лапласиан фракциясының теңдеуі мен жүйелерінің алғашқы Евгенийю мәні үшін төменгі шекті береміз. Содан кейін біз Гейзенберг пен стратификацияланған топтардағы p -суб-Лапласианмен сызықты емес теңдеу үшін әлсіз шешімнің бар екендігін көрсетеміз. Біртекті Ли топтарында бөлшек сублапласиандық және хардилік потенциалы бар сызықты емес теңдеу үшін әлсіз шешімнің бар екендігі және Гейзенберг пен стратификацияланған топтар бойынша Харди потенциалының бірінші қабаты бар әлсіз шешімнің еселігі көрсетілген. Содан кейін біз біртекті Ли топтары бойынша бөлшек суб Лапласиан пен логарифмдік сызықтық емес жылу теңдеуі үшін және стратификацияланған топтағы суб-Лапласиан пен логарифмдік сызықтық емес жылу теңдеуі үшін нәтижелерді талқылаймыз. Сонымен қатар, біз стратификацияланған топтар бойынша суб-Лапласианмен, градуирленген Ли тобындағы Рокландтың жылу және толқындық теңдеулері үшін Фудзита және Като көрсеткіштерін көрсетеміз.

Қосымшада Евклид жағдайындағы бір өлшемді функционалдық теңсіздіктерді қарастырамыз. Біріншіден, біз Капутоның, Риман-Лиувильдің және Адамардың бөлшек туындылары түрінде бөлшек дифференциалдық операторлар үшін Гальярдо-Ниренберг және Каффарелли-Кон-Ниренберг түріндегі Харди, Пуанкаре типтерінің бөлшек теңсіздіктерін аламыз. Осы теңсіздіктердің қолданылуын да көрсетеміз. Сонымен қатар, осы теңсіздіктерді қолданып біз Дирихле есебінің эллиптикалық типіндегі бөлшек дифференциалдық теңдеу үшін Ляпунов пен Хартман-Винтнер типтерінің теңсіздіктерін көрсетеміз, және де Валье-Пуссин типінің теңсіздігін көрсетеміз.